LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM
HERAUSGEGEBEN
VON DER ZENTRALSTELLE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM
DES MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN

Lineare Algebra

2. LEHRBRIEF

Lineare Gleichungssysteme

02 1013 02 1

Lineare Algebra

2. Lehrbrief

Lineare Gleichungssysteme

Verfaßt von
Dr.-Ing. Ralf K u h r t
Humboldt-Universität Berlin
Sektion Mathematik

02 1013 02 1

3. Lineare Gleichungssysteme

Nachdem in Abschnitt 2.6. des 1. Lehrbriefes bereits ein Verfahren zur Lösung gewisser linearer Gleichungssysteme angegeben wurde, ist der Inhalt dieses 2. Lehrbriefes die Darstellung eines allgemeinen Verfahrens zur Lösung linearer Gleichungssysteme, des Gauß-Algorithmus. Wir betrachten dieses Verfahren als eine Weiterentwicklung des bereits bekannten Additionsverfahrens. Es läßt sich auf alle Arten linearer Gleichungssysteme anwenden, also auch auf solche, für die eine inverse Matrix nicht gebildet werden kann und daher die Methode aus Abschnitt 2.6. nicht anwendbar ist. Weitere Verfahren können hier nicht behandelt werden, da der Selbststudienzeitfonds Grenzen setzt.

3.1. Begriffserklärungen und einführende Erläuterungen

Ein lineares Gleichungssystem besteht aus mehreren Gleichungen mit mehreren Variablen, die alle nur in der 1. Potenz vorkommen, nicht miteinander multipliziert und nicht als Argument nichtlinearer Funktionen erscheinen.

Beispiel 2.12 im 1. Lehrbrief stellt ein solches lineares Gleichungssystem dar.

Demgegenüber ist ein nichtlineares Gleichungssystem etwa durch das folgende Beispiel gegeben.

Beispiel 3.1:

$$x\,y + z^2 - x = 10 \;;\quad x^2\,e^y\,z = 3\,e \;;\quad x + y + z = 6\,.$$

Wie im Abschnitt 2.6. bereits erläutert wurde, kann man lineare Gleichungssysteme in Matrizenform darstellen. Das System aus Beispiel 2.12 soll nun diskutiert werden.

Hierin wird die Matrix vom Typ (3,3) aus Gleichung (2.33) im 1. Lehrbrief als Koeffizientenmatrix $\underline{A}$, die einspaltige Matrix, welche die drei Variablen enthält, als Variablenvektor bzw. Lösungsvektor $\underline{x}$, die einspaltige Zahlenmatrix auf der rechten Seite oft als Störvektor $\underline{b}$ bezeichnet.

Die Matrix aus den Koeffizienten und dem Störvektor,

$$\underline{B} = [\underline{A}, \underline{b}] = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

vom Typ (3,4) wird als erweiterte Koeffizientenmatrix bezeichnet.
Allgemein geben wir die
Definition 3.1: Ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (3.1)$$

heißt lineares Gleichungssystem von m Gleichungen mit n Variablen. Dabei bezeichnet man die linken Seiten der einzelnen linearen Gleichungen,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,x_k = b_i \;;\; a_{ik},\, b_i \in R \;;\; i = 1, \ldots, m,$$

als Linearformen (im Unterschied zu den quadratischen Formen).
Eine äquivalente Darstellung des linearen Gleichungssystems (3.1) ist die Matrizengleichung

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}, \qquad (3.2)$$

wobei

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

die Koeffizientenmatrix,

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

der Vektor der gesuchten Variablen bzw. der Lösungsvektor

des Gleichungssystems und

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

der Störvektor bzw. der Spaltenvektor der auf der rechten Seite des Gleichungssystems (3.1) stehenden Elemente $b_i \in R \quad (i = 1, \ldots, m)$ sowie

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix ist.

Zum Begriff des Vektors vergleiche man mit Definition 2.2 im Abschnitt 2.1. des 1. Lehrbriefes.

Definition 3.2: Ein lineares Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ heißt homogen, wenn für den Störvektor $\underline{b} = \underline{o}$ gilt, d. h., für alle Elemente b_i des Vektors $\underline{b}$ gilt: $b_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Existiert mindestens ein Element $b_k \neq 0$, so gilt auch $\underline{b} \neq \underline{o}$, und das Gleichungssystem wird als inhomogen bezeichnet.

Beispiel 2.12 im 1. Lehrbrief stellt ein inhomogenes Gleichungssystem dar.

Beispiel 3.2:

$$\begin{aligned} y - z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

stellt ein homogenes Gleichungssystem dar.

Die Lösung eines Gleichungssystems wird in der Regel als einspaltige Matrix angegeben, und diese wird dann als Lösungsvektor bezeichnet. So ergibt sich der Lösungsvektor des Systems aus Beispiel 2.12 in Form von Gleichung (2.35) im 1. Lehrbrief.

Gleichungssysteme wie (3.1) können Lösungen besitzen oder auch nicht.

Definition 3.3: Gegeben ist das Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$. Jeder Vektor $\underline{x}$, der, eingesetzt in das Gleichungssystem, dieses zu einer wahren Aussage macht, heißt Lösung des Gleichungssystems (Lösungsvektor). Die Gesamtheit aller Lösungen heißt Lösungsmenge. Sie wird dargestellt durch die allgemeine Lösung, in welcher frei wählbare Parameter enthalten sind (t_1, t_2, ... oder auch λ_1, λ_2, ...), mit denen die Vielfältigkeit der Lösungen in der Lösungsmenge zum Ausdruck gebracht wird.

Zum Begriff des äquivalenten Gleichungssystems:

Definition 3.4: Zwei lineare Gleichungssysteme $\underline{A}_1 \cdot \underline{x} = \underline{b}_1$ und $\underline{A}_2 \cdot \underline{x} = \underline{b}_2$ heißen äquivalent (gleichwertig), wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Bemerkung 3.1: Man muß, genaugenommen, zwischen dem Variablenvektor und dem Lösungsvektor unterscheiden. Im Gleichungssystem steht zunächst der Variablenvektor $\underline{x} = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n]^T$. Setzt man für die Variablen x_i spezielle Werte oder Parameter ein, so kann das Gleichungssystem entweder eine wahre Aussage darstellen, dann ist dieser Vektor auch Lösungsvektor, oder eine falsche Aussage bedeuten, dann ist dieser Vektor nicht Lösungsvektor. Für manche Gleichungssysteme existiert überhaupt kein Lösungsvektor, jeder spezielle Vektor führt dann zu einer falschen Aussage. Diese Gleichungssysteme heißen unlösbar. Deren Lösungsmengen sind leere Mengen.

3.2. Lineare Abhängigkeit von Gleichungen

Eine Gleichung wie etwa $2\,(x + 3) = 5$ enthält eine bestimmte Aussage über x, hier die Aussage $x = -\frac{1}{2}$. Für diesen speziellen Wert stellt die Gleichung eine wahre Aussage dar. Die Gleichung $4\,(x + 3) = 10$ ist durch Multiplikation der ersten Gleichung mit dem Faktor 2 entstanden und enthält die gleiche Aussage über x. Beide Gleichungen sind äquivalent. Sie sind linear abhängig voneinander, da die eine Gleichung sich mit Hilfe eines Faktors aus der anderen Gleichung ergibt.

Ein weiteres Beispiel ist die Gleichung $-6\,x - 9\,y = 3$, welche von $2\,x + 3\,y = -1$ linear abhängig ist (Faktor -3) und gegen-

über dieser keine neue Aussage über die Variablen x und y liefert.
Betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y - z &= 1 \\ x + z &= 0 \ , \end{aligned}$$

so können wir eine Variable, beispielsweise z, offensichtlich beliebig wählen (wir schreiben hierfür z = t), dann sind x und y bestimmt: x = -t und y = t + 1. Wir könnten nun diesen beiden Gleichungen eine dritte hinzufügen, die etwa aus der Summe der mit 2 multiplizierten ersten und der mit -1 multiplizierten zweiten Gleichung bestehen könnte:

$$\begin{aligned} y - z &= 1 \\ x + z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 2 \ . \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung sagt jedoch wiederum nichts Neues über die Variablen x, y, z aus und kann daher auch weggelassen werden; sie ist <u>linear abhängig</u> von den ersten beiden Gleichungen, sie ist eine <u>Linearkombination</u> der beiden zuerst genannten Gleichungen. Es ist jedoch auch möglich, die erste oder die zweite Gleichung wegzulassen und die Aussage z = t, x = -t und y = t + 1 aus den beiden nunmehr verbleibenden Gleichungen zu entnehmen. Man sagt daher: Eine Gleichung des vorgelegten Systems ist von den beiden übrigen linear abhängig, bzw. das Gleichungssystem ist linear abhängig.

Auch Beispiel 3.2 stellt ein System linear abhängiger Gleichungen dar. (Addiert man das Zweifache der ersten zur zweiten Gleichung, so ergibt sich die dritte Gleichung, welche somit keine über die ersten beiden Gleichungen hinausgehende Information liefert.)
Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß auch Gleichungssysteme der Art

<u>Beispiel 3.3</u>:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

linear abhängig genannt werden, obwohl hier nur die ersten beiden Gleichungen voneinander abhängen.

Da Gleichungen, die von anderen linear abhängen, über die Variablen keine zusätzlichen Informationen liefern, kann man sie weglassen oder, wie es später oft geschieht, durch die Identität

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \qquad (3.3)$$

formal ersetzen.

Beispiel 3.4: Das linear abhängige Gleichungssystem aus Beispiel 3.2 könnte, mit Gleichung (3.3) gleich in Matrizenform gebracht, deshalb durch das folgende äquivalente (gleichwertige), linear abhängige Gleichungssystem ersetzt werden:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 3.5: Ebenso ist das System

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dem in Beispiel 3.3 gegebenen völlig gleichwertig.

Aus diesen Erörterungen sollen zwei Schlußfolgerungen gezogen werden:

1. In linear abhängigen Gleichungssystemen sind Gleichungen überflüssig, welche dann entsprechend Gleichung (3.3) in dem Störvektor wie auch in der Koeffizientenzeile (in der Linearform) durch Null ersetzt oder auch weggelassen werden können.
2. Durch Linearkombination von Gleichungen (Addition der mit c_r ($c_r \neq 0$) multiplizierten r-ten Gleichung zur mit c_s ($c_s \neq 0$) multiplizierten s-ten Gleichung) erhält man eine zusätzliche Gleichung für das System, welche allerdings nur die Aussagen der r-ten und s-ten Gleichung über die Variablen bestätigt. Daher ist das nunmehr entstandene Gleichungssystem linear abhängig, in welchem eine der Gleichungen, beispielsweise auch die r-te oder s-te, gestrichen oder

im Sinne von Gleichung (3.3) durch Null ersetzt werden kann. (Die hier erörterte Linearkombination von Gleichungen vergleiche man mit der Linearkombination von Matrixzeilen im Abschnitt 2.8., Lehrbrief 1, bzw. von Determinantenzeilen im Abschnitt 1.4., Lehrbrief 1, Gleichung (1.11).)

3.3. Der Gauß-Algorithmus zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

3.3.1. Darlegung des Verfahrens anhand von Beispielen eindeutig lösbarer Gleichungssysteme

Wir schließen an die zuletzt gegebenen Erläuterungen und an die Kenntnisse über die Lösung linearer Gleichungssysteme mittels des sog. Additionsverfahrens an.
Beispielsweise löst man das Gleichungssystem (2.13) im 1. Lehrbrief nach diesem Verfahren, indem man die mit -1 multiplizierte erste Gleichung zur zweiten addiert und auf diese Weise die zweite Gleichung durch eine dritte ersetzt, in welcher nur noch die Variable x_2 enthalten ist. Man kann dieses Verfahren so deuten, daß zunächst durch die Addition der mit -1 multiplizierten ersten Gleichung zur zweiten ein linear abhängiges System von drei Gleichungen entsteht, aus welchem eine - in diesem Fall die zweite - gestrichen werden kann. Dieses Verfahren wird zu folgendem Schema vereinfacht:

$$
\begin{array}{ll}
(*) & 2x_1 + 3x_2 = -1 \\
-1| & \underline{2x_1 - x_2 = 3} \\
(*) & -4x_2 = 4 \,.
\end{array}
$$

Vor jene Gleichung, welche eliminiert werden soll, wird der Faktor, hier -1, geschrieben, mit welchem die erste Gleichung multipliziert wird. Die beiden verbleibenden Gleichungen werden durch einen Stern gekennzeichnet. Aus der letzten (*)-Gleichung ist dann x_2 und aus der ersten durch Einsetzen von x_2 die Variable x_1 zu bestimmen.

Wir vereinfachen die Schreibweise dieses Verfahrens noch etwas, indem wir nur noch die vor den Variablen stehenden Koeffizienten

notieren und die zugehörigen Variablen in der Kopfzeile festhalten; die Elemente des Störvektors werden in der Kopfzeile durch eine 1 markiert:

	x_1	x_2	1
(*)	2	3	-1
-1|	2	-1	3
(*)	0	-4	4

.

Denkt man sich die zweite Gleichung hierin gestrichen, weil sie linear abhängig von den übrigen Gleichungen ist, so entsteht mit

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

eine Dreiecksmatrix (vgl. Definition 2.12 im 1. Lehrbrief). Wir wollen dieses Verfahren noch anhand eines Beispiels mit drei Gleichungen für drei Variablen erläutern.

Beispiel 3.6: Das Gleichungssystem aus Beispiel 2.12 im 1. Lehrbrief soll mit Hilfe des folgenden Schemas umgeformt und dann gelöst werden (statt x_1, x_2, x_3 hier: x, y, z):

	x	y	z	1
(*)	-1	8	3	2
2|	2	4	-1	1
3|	3	0	-2	1
(*)	0	20	5	5
$-\frac{6}{5}$|	0	24	7	7
(*)	0	0	1	1

.

Die ersten drei Zeilen in dem Zahlenschema stellen das ursprüngliche Gleichungssystem dar, wenn wir die vor den Zeilen stehenden Symbole zunächst nicht beachten. Die 2. und 3. Gleichung wollen wir ersetzen, indem wir die mit den Faktoren 2 bzw. 3 (Zahlen vor der 2. und 3. Zeile) multiplizierte 1. Gleichung zu der 2. bzw. 3. Gleichung addieren. Die so vorgenommene

Linearkombination der 1. und 2. Zeile ergibt die 4., und die der 1. und 3. ergibt die 5. Zeile. (Die einzelnen Schritte sollten nachgerechnet werden!) Das ursprüngliche Gleichungssystem ist somit durch ein neues, äquivalentes, aus den Zeilen 1, 4 und 5 bestehendes ersetzt worden. Die Gleichungen in Zeile 4 und 5 stellen, allein betrachtet, ein System von zwei Gleichungen für zwei Variablen dar. Hier wird wie im vorangegangenen Beispiel durch die Addition der mit dem Faktor $-\frac{6}{5}$ multiplizierten 4. Gleichung zur 5. Gleichung diese 5. Gleichung durch die 6. Gleichung ersetzt. Insgesamt stellen nun die drei mit (*) gekennzeichneten Gleichungen in den Zeilen 1, 4 und 6 einen äquivalenten Ersatz für die drei ursprünglichen Gleichungen in den Zeilen 1, 2 und 3 dar. Sie seien noch herausgeschrieben:

x	y	z	1
-1	8	3	2
0	20	5	5
0	0	1	1

oder

x	y	z	1
-1	8	3	2
	20	5	5
		1	1 .

(3.4)

Die letzte Gleichung bedeutet $z = 1$, die zweitletzte Gleichung $20\,y + 5\,z = 5$ und ergibt nach Einsetzen von z die Beziehung $y = 0$, aus der ersten Gleichung gewinnt man nach Einsetzen von y und z das Ergebnis $x = 1$.

Die ersten beiden durch (*) gekennzeichneten linear unabhängigen Gleichungen werden als Eliminationsgleichungen, die Faktoren, mit denen diese Gleichungen zwecks Ersatzes einer der übrigen Gleichungen multipliziert werden, als Eliminationskoeffizienten bezeichnet. Im zuletzt angegebenen Rechenschema heißen die Eliminationskoeffizienten des ersten Schrittes 2 bzw. 3, der Eliminationskoeffizient des zweiten Schrittes $-\frac{6}{5}$, d. h. $-1{,}2$.

Wir schließen eine Reihe von Bemerkungen an.

Bemerkung 3.2: Um Rechenfehler zu erkennen, werden in der Regel eine Kontrollzeile und eine Kontrollspalte angelegt. In der Kontrollzeile S (1. Zeile im folgenden Beispiel) wird die Summengleichung aus den drei gegebenen Gleichungen notiert, und nach Erhalt der Ergebnisse wird durch Verifikation in S eine

Endkontrolle über die Richtigkeit dieser Ergebnisse durchgeführt. Um andererseits bei den Linearkombinationen der Gleichungen Rechenfehler zu vermeiden, wird in der letzten Spalte (Prüfspalte Pr) jeweils die Zeilensumme der Koeffizienten der drei Ausgangsgleichungen gebildet und mit in die Umrechnung einbezogen. Das Ergebnis muß ebenfalls wieder die Zeilensumme der Koeffizienten der umgerechneten Gleichung sein (begleitende Rechenkontrolle).

In diesem Sinne sei Beispiel 3.6 vervollständigt.

Beispiel 3.7:

	x	y	z	1	Pr	
S	3	12	1	4	-	
(*)	-1	8	3	2	12	
2|	2	4	-1	1	6	
3|	3	0	-2	1	2	
(*)	0	20	5	5	30	r
$-\frac{6}{5}$|	0	24	7	7	38	r
(*)	0	0	1	1	2	r .

(r deutet an, daß die Richtigkeit der dargestellten Zahl als Zeilensumme kontrolliert wurde.)

Zur Summenprobe mit der Zeile S sei aber angemerkt, daß die Richtigkeit der Gleichung in Zeile S noch keine vollständige Garantie für die Richtigkeit der Lösung ist. Es können sich hier mehrere Fehler gegenseitig aufheben. Eine vollständige Probe wird sich daher immer auf das Einsetzen der Lösung in jede einzelne der Ausgangsgleichungen stützen.

Bemerkung 3.3: Gelegentlich werden auch noch die mit den geeigneten Faktoren multiplizierten (*)-Gleichungen aufgeschrieben, bevor sie zu den zu ersetzenden Gleichungen addiert werden. Dies ist besonders zu empfehlen, wenn bei der Multiplikation komplizierte Brüche entstehen. Auch für diese Zeilen kann die Zeilensummenprobe verwendet werden. /2/

Bemerkung 3.4: Es ist für die Handrechnung zweckmäßig, die Stellung der Gleichungen bzw. die Stellung der Variablen (in allen Gleichungen) vor dem Eintragen in das Schema so auszutauschen, daß die ersten nichtverschwindenden Koeffizienten in den (*)-Gleichungen möglichst einfache Rechnungen gestatten (z. B. möglichst +1 oder -1 werden). Treten allerdings Dezimalbrüche mit Rundungsfehlern auf und sind die Koeffizienten von sehr unterschiedlicher Größe, so empfiehlt es sich, die betragsmäßig größten Koeffizienten an die vordere Stelle der Sterngleichung zu bringen, um die Fehler in den Ergebnissen möglichst gering zu halten.

Bemerkung 3.5: Das Gleichungssystem in Dreiecksform, wie in den Schemata (3.4) dargestellt, wird gestaffeltes System genannt, das Verfahren zur Erzeugung des gestaffelten Systems, wie in Beispiel 3.7 angegeben, wird als Gaußscher Algorithmus bezeichnet. Er besteht aus der Anwendung der im 1. Lehrbrief dargestellten Elementarumformungen zur Überführung der Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ in eine kanonische Dreiecksmatrix, wobei die Elemente von $\underline{b}$ entsprechend mit umgerechnet werden.

Bemerkung 3.6: Es sei schon hier, obwohl im nächsten Abschnitt genauer darauf eingegangen wird, auf die weitestgehende Übereinstimmung der Verfahren zur Bestimmung von Matrizenrängen (Beispiele 2.21 und 2.22 im 1. Lehrbrief) durch Erzeugung von kanonischen Dreiecksmatrizen, zur Berechnung von Determinanten (Beispiel 1.10 im 1. Lehrbrief) durch Herstellen von Dreiecksdeterminanten und zur Lösung von linearen Gleichungssystemen durch Erzeugung eines gestaffelten Systems, eines Dreiekssystems, hingewiesen.

Bemerkung 3.7: Es ist nicht immer erforderlich, in den einzelnen Eliminationsschritten immer die Eliminationsgleichung an die erste Stelle zu bringen. Desgleichen kann man bei einiger Übung auch auf das Austauschen der Zeilen bzw. Spalten entsprechend der Stellung der Variablen verzichten. Man erhält dann ein dem kanonischen Dreieckssystem äquivalentes, gleichwertiges System. Im Zweifelsfall sollte man jedoch immer $\underline{A}$ in die kanonische Dreiecksform überführen.

Beispiel 3.8: Das Gleichungssystem

$$5x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

ergibt ohne Umstellung

	x_1	x_2	x_3	1
-5	5	3	-5	2
-2	2	-1	3	3
(*)	1	1	-1	0
(*)	0	-2	0	2
(*)	0	-3	5	3

.

Dabei benötigt man nur einen Eliminationsschritt, um ein gestaffeltes System zu erzeugen (welches sich nach je einem Zeilen- und einem Spaltentausch problemlos in die kanonische Dreiecksform überführen ließe, falls dies notwendig erscheint). Aus der zweiten Sterngleichung ergibt sich bereits $x_2 = -1$, aus der letzten Sterngleichung dann $x_3 = \frac{3}{5}x_2 + \frac{3}{5} = 0$, aus der ersten Sterngleichung schließlich $x_1 = 1$ (vgl. auch Beispiel 3.9).

Bemerkung 3.8: Es ist möglich, durch weitere Schritte im Sinne des Gaußschen Algorithmus aus dem gestaffelten System ein Diagonalsystem zu erzeugen, welches aus Gleichungen besteht, die unmittelbar die Lösung darstellen. Dies ist jedoch wiederum (wie schon im Falle (2.35) im 1. Lehrbrief) nur für Systeme mit $\det \underline{A} \neq 0$ möglich.

Beispiel 3.9: Wir betrachten hierzu das gestaffelte System (3.4) und bringen zunächst die Elemente 3 und 5 (dritte Spalte) "zum Verschwinden", indem wir die letzte Gleichung als (*)-Gleichung verwenden und, mit den Faktoren -3 und -5 multipliziert, zur ersten bzw. zweiten Gleichung addieren. Hierbei werden die Gleichungen Zeile 1 und 2 durch jene in Zeile 4 und 5 ersetzt:

	x	y	z	1	Pr	
-3|	-1	8	3	2	12	
-5|	0	20	5	5	30	
(*)	0	0	1	1	2	
$-\frac{2}{5}$|	-1	8	0	-1	6	r
(*)	0	20	0	0	20	r
(*)	-1	0	0	-1	-2	r .

Im zweiten Schritt ist dann noch die Gleichung Zeile 4 durch Addition der mit $-\frac{2}{5}$ multiplizierten Gleichung Zeile 5 zur Gleichung Zeile 4 ersetzt worden. Hierbei ergibt sich die Gleichung Zeile 6.

Linear unabhängig sind hierin die drei (*)-Gleichungen, welche ein Diagonalsystem bilden und das Ablesen der Lösung unmittelbar gestatten. Sie seien noch einmal gesondert dargestellt:

x	y	z	1
0	0	1	1
0	20	0	0
-1	0	0	-1

bzw.

x	y	z	1
-1	0	0	-1
0	20	0	0
0	0	1	1

In der Regel wird man die Lösung schrittweise jedoch bereits aus dem gestaffelten System ermitteln.

*Aufgabe 3.1: Lösen Sie die Gleichungssysteme

a) $3x_1 - 4x_2 = 7$
$x_1 + x_2 = 0$;

b) $3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9$
$x_1 + x_2 - 5x_3 = -10$
$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12$

nach dem Gaußschen Algorithmus einschließlich der Kontrollzeile und -spalte!
(Hinweis: Gleichungssystem zweckmäßig umstellen!)

*Aufgabe 3.2: Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (einschließlich der Kontrollzeile und -spalte) sind die folgenden Gleichungssysteme zu lösen:

a) $\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$;

b) $\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 1 \\ 2x - 3y + z &= 1 \\ x + y - 4z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$.

3.3.2. Beispiele vieldeutig lösbarer sowie unlösbarer linearer Gleichungssysteme

Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf das folgende Gleichungssystem an.

Beispiel 3.10:

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y - 2z &= 0 \\ 2x - y - z &= 3 \end{aligned} .$$

Aus dem Rechenschema

	x	y	z	1
(*)	1	-1	0	2
-1|	1	1	-2	0
-2|	2	-1	-1	3
-2|	0	2	-2	-2
(*)	0	1	-1	-1
(*)	0	0	0	0

sind die beiden (linear unabhängigen) (*)-Gleichungen, das gestaffelte System,

x	y	z	1
1	-1	0	2
	1	-1	-1 ,

(3.5)

wiederum diejenigen, aus denen die Lösung ablesbar ist. Da nur zwei Gleichungen unabhängig voneinander Aussagen über drei Variablen enthalten, ist eine der Variablen, etwa z, frei wählbar.

Wir wählen $z = t$ ($t \in R$) und nennen t einen Parameter. Dann folgt aus der letzten Gleichung des Systems (3.5) $y = z - 1 = t - 1$ und aus der ersten $x = y + 2 = t + 1$. In Matrizenform (Spaltenvektor) lautet die Lösung

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + 1 \\ t - 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . \qquad (3.6)$$

Jeder speziell gewählte Wert für t ergibt einen speziellen (partikulären) Lösungsvektor $\underline{x}_p$.

Beispielsweise ergibt sich für $t = 0$:

$$\underline{x}_{p1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oder für $t = -1$:

$$\underline{x}_{p2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{und dgl.}$$

Gleichung (3.6) ist die Darstellung der allgemeinen Lösung, denn andere Vektoren als die, die durch die spezielle Wahl des Parameters t aus (3.6) erhalten werden, können das System (3.5) und daher auch das gegebene Gleichungssystem nicht lösen.

Die allgemeine Lösung (3.6) nennt man auch eine einparametrige Lösung. Da in diesem Beispiel nur eine Variable frei wählbar ist (nur ein Parameter erscheint), liegt hier eine 1fach unendlich vieldeutige Lösung vor.

Beispiel 3.11: Das System

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 &= -4 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

ergibt nach Durchführung des Gauß-Algorithmus (Bemerkung 3.9 s. S. 19)

	x_1	x_2	x_3	x_4	1
(*)	1	-1	-1	-2	-3
-1|	1	0	-2	-3	-4
(*)	0	1	-1	-1	-1
-1|	0	1	-1	-1	-1

das gestaffelte System

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	-1	-1	-2	-3
	1	-1	-1	-1

(3.7)

und hieraus nach Wahl von $x_4 = t_1$ und $x_3 = t_2$ die allgemeine Lösung $x_2 = x_3 + x_4 - 1 = t_1 + t_2 - 1$ und $x_1 = x_2 + x_3 + 2x_4 - 3 = 3t_1 + 2t_2 - 4$, welche in die Form des Lösungsvektors

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 3t_1 + 2t_2 - 4 \\ t_1 + t_2 - 1 \\ t_2 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

gebracht werden kann. Wir erläutern das Beispiel noch durch Bemerkung 3.9:

1. Das Rechenschema zur Lösung dieses Gleichungssystems begann zunächst mit einer Umstellung der drei Gleichungen, so daß die erste Gleichung als dritte eingetragen wurde und somit bereits mit dem Koeffizienten Null begann. Diese Gleichung brauchte daher im ersten Eliminationschritt nicht mit umgerechnet zu werden und wurde daher auch unter den ersten Strich geschrieben. Daß nur die Gleichungen in der dritten und vierten Zeile des Rechenschemas linear abhängig sind, sieht man auch ohne die Durchführung des zweiten Eliminationsschrittes. Somit existieren nur zwei (linear unabhängige) Sterngleichungen (3.7).
2. Lösung (3.8) ist eine zweiparametrige oder 2fach unendlich vieldeutige Lösung. Jedes spezielle Parameterpaar (t_1, t_2)

liefert eine spezielle (partikuläre) Lösung; beispielsweise liefert $(t_1, t_2) = (0, 0)$ die partikuläre Lösung

$$\underline{x}_p = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \qquad (3.9)$$

Entsprechend diesen beiden Beispielen können sich mehrdeutige Lösungen ergeben, wenn das gestaffelte System mehr Variablen als linear unabhängige Gleichungen enthält.

Schließlich sei noch ein unlösbares (widersprüchliches) lineares Gleichungssystem dem Gauß-Algorithmus unterworfen.

Beispiel 3.12: Das System

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

liefert nach zwei Eliminationsschritten,

	x_1	x_2	x_3	1
(*)	1	1	2	1
-1|	1	5	2	3
-2|	2	-2	4	5
(*)	0	4	0	2
1|	0	-4	0	3
(*)	0	0	0	5

,

ein gestaffeltes System, bestehend aus den drei (*)-Gleichungen:

x_1	x_2	x_3	1
1	1	2	1
0	4	0	2
0	0	0	5

oder

x_1	x_2	x_3	1
1	1	2	1
	4	0	2
			5

. (3.10)

Die letzte Gleichung hierin besagt $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 5$, was offenbar nicht richtig ist; somit enthält das gegebene System einen Widerspruch.

Bevor zu diesem Beispiel allgemeinere Gedanken entwickelt werden, sollte noch Aufgabe 3.3 gelöst werden.

* Aufgabe 3.3: Geben Sie, falls möglich, die allgemeine und mindestens eine partikuläre Lösung der folgenden Gleichungssysteme an:

a)
$$\begin{aligned} y - \tfrac{2}{3} z &= 0 \\ 2x + y - \tfrac{4}{3} z &= 0 \\ 3x + 3y - 3z &= 0 \ ; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 19 \\ 3x + y + 5z &= -2 \\ -6x + 102y + 3z &= 16 \ ; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \tfrac{2}{3} x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - \tfrac{4}{3} x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \ ; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \ ! \end{aligned}$$

3.4. Kriterien für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Die Erzeugung von Dreiecksmatrizen zur Lösung von Gleichungssystemen, wie etwa (3.4), (3.5), (3.7) und (3.10), erfolgt in der gleichen Weise wie die Herstellung von Dreiecksmatrizen zur Bestimmung des Ranges von Matrizen, wie etwa in Beispiel 2.21, und darüber hinaus in der gleichen Art wie die Umformung von Determinanten in Dreiecksdeterminanten zwecks Berechnung des Determinantenwertes, wie etwa in Beispiel 1.10. Sie erfolgt nämlich in allen drei Fällen durch Linearkombination der Zeilen, wie dies in (1.11) dargestellt ist, eine Operation, bei der sich weder die Lösung des Gleichungssystems noch der Rang der Matrix noch der Wert der Determinante ändern. Zwischen diesen Begriffen besteht offenbar ein Zusammenhang, wobei wir zunächst die Beziehung zwischen der Lösung des Gleichungssystems und dem Matrizenrang untersuchen wollen.
Wir betrachten deshalb das Gleichungssystem (3.4) und stellen fest, daß für dieses eindeutig lösbare Gleichungssystem gilt, daß der Rang $R(\underline{A})$ der Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ (vgl. Beispiel 3.6),

$$R(\underline{A}) = R\left(\begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3 \ ,$$

sowie der Rang $R(\underline{B})$ der erweiterten Koeffizientenmatrix $\underline{B}$,

$$R(\underline{B}) = R\left(\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]\right) = R\left(\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 20 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\right) = 3 \ ,$$

mit der Anzahl n = 3 der Variablen übereinstimmen.

Stimmen die Ränge der Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ und der erweiterten Koeffizientematrix $\underline{B}$ überein, so soll diese Zahl durch r charakterisiert werden: $R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = r$. Hiermit formulieren wir

Satz 3.1: Für die eindeutige Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems für n Variablen ist das Bestehen der Gleichungen

$$R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = r = n \qquad (3.11)$$

notwendig und hinreichend.

Aus dem Gleichungssystem (3.5) erkennt man, daß die Ränge (vgl. Beispiel 3.10)

$$R(\underline{A}) = R\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \ ,$$

$$R(\underline{B}) = R\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]\right) = R\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right) = 2$$

in bezug auf die Anzahl n = 3 der Variablen mit der 1fach unendlich vieldeutigen Lösung (einparametrigen Lösung) dieses Gleichungssystems zusammenhängen. Dies veranlaßt zur Formulierung von

Satz 3.2: Die Relationen

$$R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = r < n \qquad (3.12)$$

sind notwendig und hinreichend für eine k-fach unendlich vieldeutige (k-parametrige) Lösung des linearen Gleichungssystems mit

$$k = n - r \,. \tag{3.13}$$

Beispiel 3.11 ist ein Beispiel für k = 2, da hier mit n = 4 und r = 2 nach Gleichung (3.13) eine 2fach unendlich vieldeutige (2parametrige) Lösung entstehen muß.

Bemerkung 3.10: Wenn der Rang des Gleichungssystems r < n ist, können nämlich k = n - r geeignet ausgewählte Variablen frei gewählt, d. h. als Parameter angesetzt, werden. Es ist aber zu beachten, daß in manchen Gleichungssystemen einige Variablen als Ergebnis einen eindeutigen Wert besitzen, diese können dann also nicht beliebig gewählt werden, so daß die k = n - r frei wählbaren unter den übrigen Variablen herausgesucht werden müssen.
Schließlich entnehmen wir aus dem Gleichungssystem (3.10), d. h. aus

$$R(\underline{A}) = R\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \,,$$

$$R(\underline{B}) = R\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right]\right) = R\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]\right) = 3$$

die folgende Aussage.

Satz 3.3: Ein widersprüchliches (unlösbares) Gleichungssystem liegt vor, wenn

$$R(\underline{A}) < R(\underline{B}) \tag{3.14}$$

gilt.

Angesichts der vorgelegten sowie der noch folgenden Beispiele verzichten wir auf die Beweise der Sätze 3.1 bis 3.3.

Im Anschluß bringen wir einige Beispiele, die die Zusammenhänge zwischen den Rängen der Matrizen $\underline{A}$ (Koeffizientenmatrix) und $\underline{B}$

(erweiterte Koeffizientenmatrix) sowie gleichzeitig noch einige Rechenschritte bei der Anwendung des Gauß-Algorithmus verdeutlichen sollen.

Beispiel 3.13: Mit Hilfe der Rangbestimmung wird die Lösbarkeit des folgenden Gleichungssystems untersucht und mit Hilfe des Gauß-Verfahrens gegebenenfalls die Lösung bestimmt:

$$\begin{aligned} -4\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ x_1 - 2\,x_2 + x_3 + 6\,x_4 &= 1 \\ 5\,x_1 + 3\,x_3 + 5\,x_4 &= 2 \\ x_1 + 3\,x_2 &= -7\,. \end{aligned}$$

Mit Kontrollzeile und Prüfspalte ergibt sich folgendes Schema:

	x_1	x_2	x_3	x_4	1	Pr	
S	3	-1	5	10	-6		r
(*)	1	-2	1	6	1	7	
-1|	1	3	0	0	-7	-3	
4|	-4	-2	1	-1	-2	-8	
-5|	5	0	3	5	2	15	
(*)	0	5	-1	-6	-8	-10	r
2|	0	-10	5	23	2	20	r
-2|	0	10	-2	-25	-3	-20	r
(*)	0	0	3	11	-14	0	r
(*)	0	0	0	-13	13	0	r .

Gegenüber dem Ausgangssystem wurden im Schema die Gleichungen umsortiert. Eine Besonderheit dieses Beispiels ist, daß der Gauß-Algorithmus schon einen Schritt früher als erwartet abbricht, was dadurch zum Ausdruck kommt, daß die letzten beiden Sterngleichungen unmittelbar untereinander stehen.

Da zur Rangbestimmung ein dem Gauß-Algorithmus adäquates Verfahren zur Erzeugung der Dreiecksmatrix angewendet werden muß, ist es zweckmäßig, gleich den Gauß-Algorithmus anzuwenden, selbst wenn zunächst nur Fragen der Rangbetrachtungen (und die Lösung erst in zweiter Linie) interessieren.

Rangbetrachtungen (anhand der vier Sterngleichungen):

$$r = R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = 4 = n = 4 \ .$$

Das Gleichungssystem ist demnach eindeutig lösbar. Es ergibt sich aus den Sterngleichungen folgende Lösung (Lösungsvektor):

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ . \qquad (3.15)$$

Setzen Sie diese Werte zur Endkontrolle in die Summenzeile S ein!

<u>Beispiel 3.14</u>: Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + 2\,x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 &= 2 \\ 9\,x_1 + \ \ x_2 - 32\,x_3 - 8\,x_4 &= 1 \\ -x_1 + \ \ x_2 + 10\,x_3 + 2\,x_4 &= 1 \\ -17\,x_1 + 8\,x_2 + 25\,x_3 + 9\,x_4 &= -8 \end{aligned}$$

kann durch das folgende Schema gelöst werden:

	x_1	x_2	x_3	x_4	1
3|	3	2	-1	-1	2
9|	9	1	-32	-8	1
(*)	-1	1	10	2	1
-17|	-17	-8	25	9	-8
(*)	0	5	29	5	5
-2|	0	10	58	10	10
5|	0	-25	-145	-25	-25
(*)	0	0	0	0	0
(*)	0	0	0	0	0 .

Es soll hiermit wieder darauf hingewiesen werden (vgl. Beispiel 3.8), daß es häufig nicht nötig ist, wie in Beispiel 3.13 Gleichungen auszutauschen. Entscheidend ist nicht, wo die Eliminationsgleichung steht, sondern daß sie durch (*) gekennzeichnet wird, um für die Rangbetrachtungen und die Lösungsdarstellung

leicht auffindbar zu bleiben. Hier ergibt sich offenbar mit $x_4 = t$ und $x_3 = s$

$$r = R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = 2 < n = 4 \ ,$$

$$k = n - r = 2 \text{ (2 Parameter)} \ ,$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \frac{21}{5} \\ -\frac{29}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Da s frei wählbar ist, kann man den Faktor $\frac{1}{5}$ aus der letzten Matrix herausziehen und den damit entstehenden Parameter $\frac{s}{5}$ als neuen, wiederum frei wählbaren Parameter τ bezeichnen:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} 21 \\ -29 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} . \qquad (3.16)$$

Beispiel 3.15: Für das folgende homogene Gleichungssystem ist der Wert von λ so anzugeben, daß eine nichttriviale Lösung (Lösung, bei der nicht notwendig alle Variablen verschwinden) entsteht. Wie lautet diese Lösung? Die Rechnung wird mit Hilfe des Gauß-Algorithmus einschließlich der Kontrollzeile (Summengleichung) und Prüfspalte durchgeführt. Das Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 13x_2 - 6x_3 + \lambda x_4 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Das folgende Schema sollte wieder nachgerechnet werden. Es wird anschließend kommentiert.

Bei der Anfertigung des Rechenschemas gilt es, auf drei Besonderheiten zu achten:

1. In allen Rechnungen ist der Wert λ enthalten, der wie eine Zahl mit umzurechnen ist (vgl. Kontrollzeile und Prüfspalte).

2. Die zweite Gleichung des Systems enthält als ersten Koeffizienten eine Null, sie wird deshalb gleich als zweite Sterngleichung unter den ersten Trennstrich geschrieben, sollte aber bei der Bildung der Summengleichung S mit berücksichtigt werden.

3. Im zweiten Eliminierungsschritt werden die Nullelemente nicht in der zweiten Spalte, sondern in der dritten Spalte erzeugt, was einfacher ist, da hier der Eliminationskoeffizient -1 lautet, während bei den Umrechnungen der zweiten Spalte Brüche durch die Eliminationskoeffizienten $\frac{3}{2}$ bzw. $-\frac{9}{2}$ entstehen würden (vgl. auch Beispiel 3.8). Eine andere Möglichkeit mit einfachen Umrechnungen wäre etwa die Wahl einer anderen Zeile als (*)-Zeile im zweiten Block des Schemas.

	x_1	x_2	x_3	x_4	1	Pr	
S	3	-11	-5	$\lambda-1$	0		
(*)	1	-1	0	1	0	1	
2|	-2	5	2	-4	0	1	
-4|	4	-13	-6	λ	0	$\lambda-15$	
(*)	0	-2	-1	2	0	-1	
2|	0	3	2	-2	0	3	r
-6|	0	-9	-6	$\lambda-4$	0	$\lambda-19$	r
(*)	0	-1	0	2	0	1	r
3|	0	3	0	$\lambda-16$	0	$\lambda-13$	r
(*)	0	0	0	$\lambda-10$	0	$\lambda-10$	r

Das gestaffelte System (die Sterngleichungen), dargestellt in der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-10 & 0 \end{array}\right], \qquad (3.17)$$

läßt die folgenden beiden Lösungsvarianten erkennen:

1. Für $\lambda \neq 10$ ist aus der letzten Gleichung $x_4 = 0$ abzulesen. Die übrigen Gleichungen ergeben hiermit ebenfalls notwendig: $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 = 0$. Diese Lösung heißt die triviale Lösung. Sie entsteht hier als eindeutige Lösung auf Grund von

$$r = R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = 4 = n \ .$$

2. Für $\lambda = 10$ dagegen entsteht die wichtigere nichttriviale Lösung. Es ergibt sich hiermit aus dem dreiecksäquivalenten System (durch Tausch der 2. und 3. Spalte entstände die kanonische Dreiecksmatrix), wiederum in Form der erweiterten Koeffizientenmatrix angegeben,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] ,$$

$r = R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = 3 < n = 4$ und somit $k = n - r = 4 - 3 = 1$ als Hinweis auf eine 1fach unendlich vieldeutige Lösbarkeit; mit $x_4 = t$ liefert die dritte Gleichung $x_2 = 2\,x_4 = 2\,t$, die zweite $x_3 = -2\,x_2 + 2\,x_4 = -2\,t$ und die erste $x_1 = x_2 - x_4 = t$, zusammengefaßt:

$$\underline{x} = t\,[1 \quad 2 \quad -2 \quad 1]^T \ . \qquad (3.18)$$

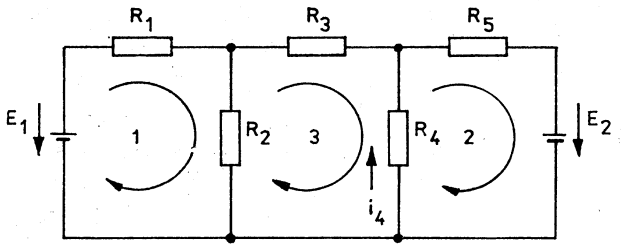
Verifizieren Sie diese Lösung durch Einsetzen in die Summenzeile S des Schemas!
Für $t = 0$ erhält man auch hier wieder die triviale Lösung, aber sie ergibt sich nicht notwendig als (einzige) Lösung. In der Regel wird für praktische Fragestellungen eine partikuläre nichttriviale Lösung gesucht, etwa für $t = \frac{1}{10}$ die partikuläre Lösung

$$\underline{x}_p = \frac{1}{10}\,[1 \quad 2 \quad -2 \quad 1]^T \ .$$

Es ist aber festzustellen, daß es nicht immer zweckmäßig ist, homogene Gleichungssysteme mit einem zunächst unbekannten Koeffizienten λ von vornherein mittels Gauß-Verfahrens auf gestaf-

felte Systeme umzurechnen. Es sei hierzu auf Abschnitt 3.5., Gleichung (3.25), verwiesen.

Beispiel 3.16: Gegeben sei die folgende Schaltung:



In dieser Schaltung sind drei Maschen enthalten, die (willkürlich) im Uhrzeigersinn orientiert und (willkürlich) numeriert wurden. Für eine derartige Schaltung kann man auf Grund der Maschenstromanalyse folgende Matrizengleichung aufstellen:

$$\begin{bmatrix} -E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & 0 & -R_2 \\ 0 & R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} . \qquad (3.19)$$

Erläuterung: j_k bedeuten die Maschenströme, die Ströme, die in einer Masche in Orientierungsrichtung fließen. Benötigt man einen Zweigstrom, z. B. denjenigen durch R_4, so sind die durch diesen Zweig fließenden Maschenströme zu berücksichtigen. Unter Umständen können mehrere Maschenströme beteiligt sein, da ein Zweig mehreren Maschen angehören kann. Durch R_4 beispielsweise fließt der Zweigstrom $i_4 = j_2 - j_3$ in der skizzierten Richtung.

Die drei Maschenströme j_1, j_2, j_3 werden zu einer einspaltigen Matrix, dem Maschenstromvektor, zusammengefaßt:

$$\underline{j} = \left[j_1, j_2, j_3\right]^T .$$

Die in Gleichung (3.19) links stehende einspaltige Matrix

$$\underline{u} = \left[-E_1, E_2, 0\right]^T , \qquad (3.20)$$

der Umlaufspannungsvektor, enthält die in den drei Maschen vorhandenen Spannungsquellen, wobei sich das Vorzeichen danach richtet, ob die Orientierung der Spannung mit der Maschenorientierung übereinstimmt oder nicht.

Die Matrix vom Format (3,3), die Widerstandsmatrix $\underline{Z}$, ist eine symmetrische Matrix; sie enthält in der Hauptdiagonale die in der jeweiligen Masche vorhandenen Widerstände, während an der Stelle (i, k) mit $k \neq i$ (außerhalb der Hauptdiagonale) diejenigen Widerstände stehen, welche gleichzeitig den Maschen Nr. i und Nr. k angehören. Dabei richtet sich das Vorzeichen danach, ob die entsprechenden Widerstände von den beteiligten Maschenorientierungen gleichsinnig oder gegensinnig durchlaufen werden.

Gleichung (3.19) kann als

$$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{j} \tag{3.21}$$

geschrieben werden. Möchte man gewisse Ströme j_k ausrechnen, so könnte aus Gleichung (3.21)

$$\underline{j} = \underline{Z}^{-1} \cdot \underline{u} = \underline{Y} \cdot \underline{u} \tag{3.22}$$

gewonnen werden, wobei aus der Widerstandsmatrix $\underline{Z}$ die reziproke Widerstandsmatrix, die Leitwertmatrix $\underline{Y} = \underline{Z}^{-1}$, zu berechnen ist (vgl. Beispiel 2.13 im 1. Lehrbrief).

Wenn die Elemente von $\underline{u}$ gegeben und die Elemente von $\underline{j}$ gesucht sind, so ist Gleichung (3.19) ein inhomogenes Gleichungssystem für die drei Variablen j_1, j_2 und j_3.

Gleichung (3.22) entspricht dann der Auflösung des Gleichungssystems entsprechend Abschnitt 2.6. (vgl. Gleichung (2.34) im 1. Lehrbrief).

Das Gleichungssystem (3.19) kann selbstverständlich jedoch auch nach dem Gauß-Algorithmus gelöst werden.

* Aufgabe 3.4: Untersuchen Sie mit Hilfe der Rangbestimmung die Lösbarkeit, und bestimmen Sie gegebenenfalls mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Lösung des Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
x - 2y + z - t + 6 &= 0\\
-4x - 2y + z + 2t - 1 &= 0\\
x + 3y + 7t &= 0\\
5x + 3z - 2t + 5 &= 0\\
-14x - 2y + 5z + 24t - 3 &= 0\ !
\end{aligned}
$$

*Aufgabe 3.5: Mit Hilfe der Ranguntersuchung sind die folgenden Gleichungssysteme auf ihre Lösbarkeit hin zu beurteilen:

a)
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6\\
3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10\\
2x_1 + x_2 - x_3 + \tfrac{11}{2}x_4 &= 2\ ;
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
x - 2y + z + t &= 1\\
5x - 10y + 5z + 5t &= 5\\
2x - 4y + 2z + 2t &= 2\\
x - 2y + z + t &= 0\ !
\end{aligned}
$$

*Aufgabe 3.6: Lösen Sie das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3\\
-2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= -6\\
-2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

mit Hilfe des Gauß-Verfahrens einschließlich Kontrollzeile S und Prüfspalte! Führen Sie die Endkontrolle mit Hilfe von S durch!

*Aufgabe 3.7: Die Lösbarkeitsentscheidung mit Hilfe der Rangbestimmung und gegebenenfalls die Lösung des Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
u_1 + 4u_2 - 2u_3 + 3u_4 &= 6\\
5u_1 + 3u_2 + 8u_3 + 2u_4 &= 7\\
11u_1 - 7u_2 + 32u_3 - 6u_4 &= -3
\end{aligned}
$$

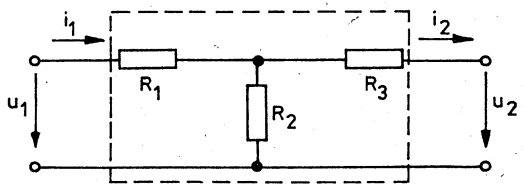
sind gefragt.

*Aufgabe 3.8[+]: Bestimmen Sie für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (3-\lambda)\,x - \quad & y - \quad z = 0 \\ -x + (3-\lambda)\,y - \quad & z = 0 \\ -x - \quad & y + (3-\lambda)\,z = 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Gauß-Algorithmus einschließlich der Kontrollzeile und Prüfspalte alle reellen λ-Werte so, daß jeweils nichttriviale Lösungen entstehen, und berechnen Sie die jeweils zugehörige allgemeine Lösung! (Hinweis: Es ergeben sich zwei verschiedene λ-Werte mit allen jeweils zu bestimmenden nichttrivialen Lösungen.)

*Aufgabe 3.9: Für den Vierpol



finden Sie die folgende Matrizendarstellung:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ R_2 & -R_2 - R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} .$$

Betrachten Sie u_1 und u_2 als gegeben sowie i_1 und i_2 als Variablen, die

a) nach dem Gauß-Verfahren einschließlich Kontrollspalte und -zeile berechnet werden sollen! (Führen Sie die Endkontrolle durch!)

b) durch Auflösen nach der Strommatrix $\underline{i}$ entsprechend Abschnitt 2.6. im 1. Lehrbrief berechnet werden sollen!

3.5. Allgemeine Lösung homogener und inhomogener linearer Gleichungssysteme

Die Methode zur Lösung von Gleichungssystemen ist in den vorangegangenen Abschnitten dargelegt worden. Hier soll nun die Struktur der sich dabei ergebenden Lösungen untersucht werden.

3.5.1. Bemerkungen über nichttriviale Lösungen homogener Gleichungssysteme

Vorgelegt sei das System (3.1), jedoch hier mit $m = n$ und mit $b_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n} x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn} x_n &= 0 \,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dieses System hat, wie jedes homogene System, in jedem Fall eine Lösung, die triviale Lösung:

$$x_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \,,$$

d. h.,

$$\underline{x} = \underline{o} \quad \text{mit} \quad \underline{x} = \left[x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n\right]^T \,, \tag{3.24}$$

wenn man die n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als einspaltige Matrix, d. h. als Vektor, schreibt (vgl. Definitionen 3.1 und 2.2 im 1. Lehrbrief).

Der folgende Satz beantwortet die Frage, ob es außer der trivialen Lösung noch andere Lösungen des Systems (3.23) gibt.

Satz 3.4: Nichttriviale Lösungen des homogenen Gleichungssystems (3.23) existieren genau dann, wenn für die Koeffizientendeterminante $\det \underline{A}$ gilt:

$$\det \underline{A} = 0 \,. \tag{3.25}$$

Beweis für die Notwendigkeit (dieser Bedingung): Wir nehmen das Gegenteil von Bedingung (3.25) an, also $\det \underline{A} \neq 0$, und finden unter Berücksichtigung von Formel (2.34) im 1. Lehrbrief:

$$\det \underline{A} \neq 0 \Longrightarrow \underline{A}^{-1} \text{ existiert} \Longrightarrow \underline{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{o} = \underline{o} \ .$$

Beweis für die Hinlänglichkeit: Bedingung (3.25) ist auch hinreichend für die Existenz nichttrivialer Lösungen, denn $\det \underline{A} = 0$ bedeutet nach Definition 2.22, 1. Lehrbrief, daß die Unterdeterminante größtmöglicher Ordnung verschwindet, somit sind die Relationen (3.12) erfüllt. Daher ist mindestens eine Variable frei wählbar und deshalb auch nichttrivial wählbar. Die Hinlänglichkeit der Bedingung (3.25) ist damit gezeigt. ■

Beispiel 3.17: Ausgehend von Beispiel 3.15, ermitteln wir die zur nichttrivialen Lösung führenden λ-Werte mit Hilfe von Gleichung (3.25) statt über den Gauß-Algorithmus. Dabei ist λ so zu berechnen, daß sich gemäß Gleichung (3.25)

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & -4 \\ 4 & -13 & -6 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ergibt. Die Determinante selbst kann auf mehrere Arten berechnet werden, die mit nahezu gleichem Aufwand an Rechenarbeit verbunden sind. Zwei Varianten seien hier vorgeführt:

a) Die Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -13 & -6 & \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -13 & -6 & \lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 12) - 2\,(\lambda - 13) - 4 = -\lambda + 10 \ .$$

b) Die Umrechnung der Determinante auf Dreiecksform gemäß Beispiel 1.10, 1. Lehrbrief, entspricht genau der Anwendung des Gauß-Algorithmus, dargestellt im Schema, S. 27. Die Dreiecksdeterminante ist deshalb identisch mit der aus der Dreiecksmatrix (3.17) abzulesenden Determinante:

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & -4 \\ 4 & -13 & -6 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 10 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 10 \end{vmatrix} = -\lambda + 10 \ .$$

(Die letzte Determinante ist durch Spaltentausch aus der vorhergehenden erzeugt worden.) Es muß jedoch betont werden, daß in vielen Fällen, insbesondere wenn die Determinanten nur von 3. Ordnung (oder niedriger) sind, die Variante a die einfachere ist.

Im übrigen ergibt sich $\det \underline{A} = 0 \Longrightarrow \lambda - 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = 10$.
Die nichttriviale Lösung findet man dann wie in Beispiel 3.15.

Satz 3.5: Die im Fall $\det \underline{A} = 0$ existierende nichttriviale Lösung des homogenen Gleichungssystems (3.23) ist eine k-fach unendlich vieldeutige Lösung ($k = n - r \geq 1$).
Diesen Satz illustrieren wir durch

Beispiel 3.18: Wir greifen auf das System aus Beispiel 3.11 zurück, indem wir dort die rechten Seiten durch Nullelemente ersetzen:

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Die vierte, noch fehlende "Gleichung" kann man sich in der Form (3.3) hinzugefügt denken. Man nennt dieses System das zu dem inhomogenen System (aus Beispiel 3.11) gehörige homogene System. Das gestaffelte System analog (3.7) ergibt sich zu

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	-1	-1	-2	0
	1	-1	-1	0 .

(3.26)

Die Lösung kann dann mit Hilfe der willkürlichen Festsetzung $x_4 = t_1$, $x_3 = t_2$ in der Form

$$\underline{x}_h = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.27)$$

angegeben werden, wobei der Index h diese Lösung als eine Lösung des homogenen Systems kennzeichnen soll.

Bemerkung 3.11: Mit Gleichung (3.27) liegt eine 2fach unendlich vieldeutige Lösung vor. Das entspricht dem Satz 3.5, denn mit den in diesem Beispiel gültigen Daten n = 4 (Anzahl der Variablen) und $R(\underline{A}) = r = 2$ ergibt sich $k = n - r = 2$.

Andere Lösungen als die durch Gleichung (3.27) ausgewiesenen sind mit dem Dreiecksystem (3.26) und daher mit dem gegebenen Gleichungssystem nicht vereinbar. Die beiden frei wählbaren Parameter t_1, t_2 in (3.27) repräsentieren bereits die ganze Vielfalt der möglichen Lösungen; (3.27) stellt die allgemeine Lösung dar (vgl. Definition 3.3).

3.5.2. Linear unabhängige Lösungen homogener Gleichungssysteme; Fundamentallösungen

Die folgenden Erläuterungen seien mit Hilfe der Lösung (3.27) motiviert. Spezielle Lösungen erhält man aus Lösung (3.27), indem man z. B. $t_1 = 1$ und $t_2 = 0$ setzt,

$$\underline{x}_{h1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (3.28)$$

oder $t_1 = 0$ und $t_2 = 1$ setzt,

$$\underline{x}_{h2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.29)$$

Diese beiden Lösungen, wieder als Vektoren dargestellt, werden Fundamentallösungen genannt. Diese sind linear unabhängig voneinander, d. h., eine Lösung läßt sich nicht in linearer Abhängigkeit (durch Multiplikation mit einem Faktor) von der anderen darstellen. Für allgemeinere Fälle geben wir folgende Erläuterung: n Lösungen (Vektoren) eines homogenen Gleichungssystems $\underline{x}_{h1}, \underline{x}_{h2}, \ldots, \underline{x}_{hn}$ heißen linear unabhängig, wenn es nicht möglich ist, eine dieser Lösungen als Linearkombination der anderen darzustellen, wenn es also nicht möglich ist, folgende Gleichung mit Koeffizienten $\lambda_k \neq 0$ herzustellen:

$$\underline{x}_{hi} = \lambda_1 \underline{x}_{h1} + \lambda_2 \underline{x}_{h2} + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{h,i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{h,i+1} + \ldots + \lambda_n \underline{x}_{hn},$$

kurz:

$$\underline{x}_{hi} = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \lambda_k \underline{x}_{hk} .$$

Indem man $\underline{x}_{hi}$ noch auf beiden Seiten subtrahiert und den nun bei $\underline{x}_{hi}$ stehenden Koeffizienten -1 als λ_i interpretiert, gewinnt man aus dieser Erläuterung

Definition 3.5: n Lösungen (Vektoren) eines gegebenen Gleichungssystems $\underline{x}_{h1}, \underline{x}_{h2}, \ldots, \underline{x}_{hn}$ heißen linear unabhängig, wenn aus dem Bestehen der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{x}_{hk} = \underline{o} \qquad (3.30)$$

notwendig zu schlußfolgern ist: $\lambda_k = 0$ für alle k ($k = 1, \ldots, n$).
Ist diese Notwendigkeit nicht gegeben, gelingt es also, auch nur einen Koeffizienten $\lambda_j \neq 0$ zu finden, bei dessen Verwendung Gleichung (3.30) erfüllt ist, so heißt das System der Lösungen linear abhängig. Wenn also etwa die triviale Lösung $\underline{x}_{h1} = \underline{o}$ im System der Lösungen als 1-te Lösung vorkommt, so ist dieses Lösungssystem immer linear abhängig, denn vor $\underline{x}_{h1} = \underline{o}$ kann ein beliebiger, also nicht notwendig verschwindender Koeffizient λ_1 stehen und dennoch Gleichung (3.30) erfüllt werden. Wir suchen nur linear unabhängige Lösungen, und damit entfällt die triviale Lösung.

Beispiel 3.19: Die Lösungen (Vektoren) $\underline{x}_{h1}$ und $\underline{x}_{h2}$ aus (3.28) und (3.29) sind linear unabhängig, denn Gleichung (3.30), für den vorliegenden Fall in der Form

$$\lambda_1 \underline{x}_{h1} + \lambda_2 \underline{x}_{h2} = \underline{o} \ , \tag{3.31}$$

d. h.,

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

darzustellen, ist nur für $\lambda_{1,2} = 0$ erfüllbar. ($\lambda_{1,2} = 0$ ist notwendig für das Bestehen von Gleichung (3.31).)

Dagegen sind z. B. die drei Lösungen (Vektoren)

$$\underline{x}_{h1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{x}_{h2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } \underline{x}_{h3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

linear abhängig voneinander, denn Gleichung (3.30) nimmt für diesen Fall die Form

$$\lambda_1 \underline{x}_{h1} + \lambda_2 \underline{x}_{h2} + \lambda_3 \underline{x}_{h3} = \underline{o} \ , \quad \text{d. h.,}$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \tag{3.33}$$

an und läßt sich nicht nur mit $\lambda_{1,2,3} = 0$, sondern auch mit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$ erfüllen. Prüfen Sie das durch Einsetzen dieser λ-Werte in Formel (3.33) für jede der vier dort enthaltenen homogenen Gleichungen nach!

Das Vorgehen zur Berechnung der λ-Werte sei an den folgenden beiden Beispielen demonstriert.

Beispiel 3.20: Gegeben sind die drei Vektoren

$$\underline{x}_{h1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{x}_{h2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ und } \quad \underline{x}_{h3} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Es ist zu prüfen, ob diese linear abhängig oder unabhängig sind, und im Falle der Abhängigkeit sind entsprechende (nichtverschwindende) λ-Werte anzugeben! Zur Lösung dieses Problems stellen wir die Gleichung (3.30) mit den gegebenen $\underline{x}_{hk}$ auf, die im vorliegenden Fall also folgende Form annimmt:

$$\sum_{k=1}^{3} \lambda_k \underline{x}_{hk} = \lambda_1 \underline{x}_{h1} + \lambda_2 \underline{x}_{h2} + \lambda_3 \underline{x}_{h3} = \underline{0} , \qquad \text{d. h.,}$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \qquad (3.34)$$

Wie (3.30) so ist auch das System (3.34) ein homogenes Gleichungssystem für die drei Unbekannten λ_1, λ_2, λ_3, welches nach dem Gauß-Algorithmus zu lösen ist (Überführung in ein gestaffeltes System):

λ_1	λ_3	λ_2	1
1	-1	1	0
-2	-1	1	0
0	1	3	0 ,

λ_1	λ_3	λ_2	1
1	-1	1	0
0	1	3	0
0	0	12	0 .

(3.35)

(Darin sind Spalten 2 und 3 vertauscht.) Rechnen Sie das nach! Die letzte Gleichung des Dreiecksystems lautet

$12 \lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = 0$; die übrigen Gleichungen ergeben $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 = 0$. Man erhält <u>nur</u> die <u>triviale Lösung</u>: Alle λ-Werte <u>müssen</u> gleich Null gewählt werden, damit (3.34) erfüllt wird, d. h. nach Definition 3.5, daß die gegebenen $\underline{x}_{h1}$, $\underline{x}_{h2}$, $\underline{x}_{h3}$ <u>linear unabhängig</u> sind.

Beispiel 3.21: Zwecks Untersuchung auf lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit werden die drei Vektoren

$$\underline{x}_{h1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{x}_{h2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } \quad \underline{x}_{h3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

in die Gleichung (3.30) eingesetzt. Das dabei entstehende homogene lineare Gleichungssystem für die Unbekannten λ_1, λ_2, λ_3 wird in ein Dreiecksystem (gestaffeltes System) überführt:

λ_3	λ_2	λ_1	1
1	2	3	0
0	1	1	0
-1	1	0	0 ,

λ_3	λ_2	λ_1	1
1	2	3	0
0	1	1	0
0	0	0	0 .

(3.36)

(Rechnen Sie das nach!) Hierin ist $\lambda_1 = t$ (frei wählbar). Damit ergibt sich aus der zweiten Gleichung $\lambda_2 = -t$ und aus der ersten $\lambda_3 = -t$. Für alle λ_i können somit (im Falle $t \neq 0$) auch nichttriviale Werte angegeben werden, d. h., die gegebenen Vektoren sind linear abhängig.

Im 3. Lehrbrief (Vektoralgebra), Abschnitt 4.3., kommen wir auf diese Problematik zurück.

Aufgabe 3.10: Untersuchen Sie mit der in den Beispielen 3.20 und 3.21 angegebenen Methode, ob die drei Vektoren aus (3.32) linear abhängig oder unabhängig sind! Ermitteln Sie gegebenenfalls entsprechende λ_i-Werte!

3.5.3. Allgemeine Lösung homogener Gleichungssysteme

Aus den bisherigen Ausführungen kann man unter Berücksichtigung der Sätze 3.1 und 3.2 zu folgenden Schlüssen kommen:

1. Für ein homogenes System gilt immer $R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = r$, es ist also immer lösbar (mindestens trivial lösbar).
2. Ist ein homogenes Gleichungssystem nichttrivial lösbar, so gelten die Gleichungen (3.12) und (3.13). Man erhält also eine k-parametrige Lösung mit $k = n - r$. Sie setzt sich

zusammen aus den k Parametern, die mit jeweils einer der speziellen Lösungen multipliziert werden, welche man als Fundamentallösungen bezeichnen kann (vgl. (3.27)).

3. Die Fundamentallösungen sind linear unabhängig. Weitere Lösungen, die dann von den Fundamentallösungen abhängen, werden durch Linearkombination der Fundamentallösungen erzeugt (zum Begriff Linearkombination vgl. Abschnitt 1.4., Bemerkungen nach Satz 1.7, 1. Lehrbrief).

Offensichtlich gilt also

Satz 3.6: Ein lineares homogenes Gleichungssystem mit n Variablen, dessen Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ den Rang r hat, besitzt genau k = n - r linear unabhängige (nichttriviale) Lösungen $\underline{x}_{hi}$, die man als Fundamentalsystem bezeichnet. Jede andere Lösung läßt sich als Linearkombination dieser Fundamentallösungen darstellen.

Definition 3.6: Vorgelegt sei ein lineares homogenes Gleichungssystem mit dem Rang $r < n$ für n Variablen, d. h., es existieren n - r Fundamentallösungen $\underline{x}_{hi}$. Die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems ist dann durch

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{x}_{h1} + \lambda_2 \underline{x}_{h2} + \ldots + \lambda_{n-r} \underline{x}_{h,n-r} \qquad (3.37)$$

mit willkürlich wählbaren Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ gegeben. Für r = n existiert als einzige die triviale Lösung.

Bemerkung 3.12: Während gemäß Beispiel 3.18 und Bemerkung 3.11 die allgemeinen Lösungen bisher die Parameter $t_1, t_2, \ldots$ enthielten, werden diese hier mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ bezeichnet.

Bemerkung 3.13: Wir sind zunächst ausgegangen von dem Gleichungssystem (3.23), d. h. n Gleichungen für n Variablen. Satz 3.6 gilt aber ebenso für m Gleichungen mit n Variablen. Gilt insbesondere $m < n$, so ist grundsätzlich $r < n$, da der Rang nicht größer als die Anzahl m der Gleichungen werden kann, und daher existieren immer nichttriviale Lösungen.

* Aufgabe 3.11: Für welche reellen Werte von λ sind die folgenden Gleichungssysteme nichttrivial lösbar? Geben Sie für die entsprechenden λ-Werte die allgemeinen Lösungen an!

a) $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x + y + \lambda z &= 0 \ ; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 15x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 4x_2 + \lambda x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \ ; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} (3-\lambda)x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + (3-\lambda)x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + (3-\lambda)x_3 &= 0 \ . \end{aligned}$

3.5.4. Allgemeine Lösung inhomogener Gleichungssysteme

In dem Gleichungssystem (3.1) gilt jetzt für mindestens ein j: $b_j \neq 0$. Die triviale Lösung erfüllt nun nicht mehr das Gleichungssystem.
Nachfolgend beantworten wir die Frage, in welchem Zusammenhang die Lösungsmengen des inhomogenen und des zugehörigen homogenen Gleichungssystems stehen. Dabei erzeugt man das zugehörige homogene Gleichungssystem aus dem inhomogenen dadurch, daß alle $b_i \neq 0$ vorübergehend durch Null ersetzt werden.

Satz 3.7: Die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ergibt sich dadurch, daß zur allgemeinen Lösung $\underline{x}_h$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems eine partikuläre (spezielle) Lösung $\underline{x}_p$ des inhomogenen Gleichungssystems addiert wird:

$$\underline{x} = \underline{x}_h + \underline{x}_p = \lambda_1 \underline{x}_{h1} + \lambda_2 \underline{x}_{h2} + \ldots + \lambda_{n-r} \underline{x}_{h,n-r} + \underline{x}_p \ . \tag{3.38}$$

Die Richtigkeit dieser Aussage kann folgendermaßen nachgeprüft werden:
Wenn $\underline{x}_p$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ist und $\underline{x}_h = \lambda_1 \underline{x}_{h1} + \ldots + \lambda_{n-r} \underline{x}_{h,n-r}$ die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems, dann gilt für beliebige Werte λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n - r)$

$$\underline{A} \cdot (\underline{x}_h + \underline{x}_p) = \underline{A} \cdot \underline{x}_h + \underline{A} \cdot \underline{x}_p = \underline{o} + \underline{A} \cdot \underline{x}_p = \underline{o} + \underline{b} = \underline{b} \ .$$

Die Vollständigkeit der Lösungsmenge ist durch die Anzahl ($k = n - r$) freier Parameter gemäß Bemerkung 3.11 und Bemerkung 3.12 garantiert.
Rechentechnisch gehen wir so wie etwa in den Beispielen 3.10, 3.11 und 3.14 vor. Eine partikuläre Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $\underline{x}_p$ erhält man, wenn man alle Parameter der Lösung gleich Null setzt, die allgemeine Lösung $\underline{x}_h$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ergibt sich dadurch, daß die partikuläre inhomogene Lösung $\underline{x}_p$ aus der Gesamtlösung vorübergehend fortgelassen wird. So ist in der Lösung (3.8) von Beispiel 3.11

$$\underline{x}_h = t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \quad \underline{x}_p = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(vgl. auch Lösung (3.27)) bzw. in der Lösung von Beispiel 3.14

$$\underline{x}_h = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} 21 \\ -29 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{x}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

In etwas modifizierter Form kann man auch so vorgehen, daß man

1. den Gauß-Algorithmus zur Erzeugung eines äquivalenten Dreieckssystems anwendet;
2. die $n - r$ frei wählbaren Variablen gleich Null setzt und für die restlichen Variablen dann die Werte aus dem Dreieckssystem entnimmt; hierbei ergibt sich eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems $\underline{x}_p$;
3. die "rechten Seiten" des Systems durch $b_i = 0$ ersetzt (zugehöriges homogenes System) und hieraus die $(n - r)$-parametrige, allgemeine homogene Lösung $\underline{x}_h$ bestimmt;
4. $\underline{x}_h$ und $\underline{x}_p$ addiert.

Beispiel 3.22: Wir wollen das System aus Beispiel 3.14 noch einmal nach dieser Methode lösen.

1. Die Erzeugung eines äquivalenten Dreieckssystems mit Hilfe des Gauß-Algorithmus ist aus Beispiel 3.14 zu entnehmen.

2. Wir wählen $x_3 = x_4 = 0$. Dann ergibt sich aus den ersten beiden (*)-Gleichungen $5\,x_2 = 5$, d. h., $x_2 = 1$, und $-x_1 = 1 - x_2$, d. h., $x_1 = 0$. Somit entsteht eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems:

$$\underline{x}_p = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T .$$

3. Das zugehörige homogene System erhalten wir aus dem Gauß-Schema des Beispiels 3.14 dadurch, daß alle Zahlen in der 1-Spalte durch Null ersetzt werden.
So entsteht mit $x_4 = t$, $x_3 = s$ aus den ersten beiden Sterngleichungen des Schemas aus Beispiel 3.14

$$5\,x_2 + 29\,s + 5\,t = 0, \text{ d. h., } x_2 = -t - \frac{29}{5}\,s, \text{ und}$$

$$-x_1 + x_2 + 10\,s + 2\,t = 0, \text{ d. h., } x_1 = t + \frac{21}{5}\,s .$$

Somit ergibt sich die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems zu

$$\underline{x}_h = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \frac{21}{5} \\ -\frac{29}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} 21 \\ -29 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

4. $\underline{x} = \underline{x}_h + \underline{x}_p$ entspricht Gleichung (3.16).

Bemerkung 3.14 zu Punkt 2., Beispiel 3.22: Um eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems zu erhalten, ist die Wahl von $x_3 = x_4 = 0$ nicht unbedingt erforderlich, wenn auch zweckmäßig.

In dieser Form ist die Ermittlung der allgemeinen Lösung ausdehnbar auf andere mathematische Lösungsverfahren (vgl. Lösungen von linearen Differentialgleichungen).

* Aufgabe 3.12: Geben Sie die allgemeine Lösung folgender Gleichungssysteme sowie jeweils die allgemeine Lösung $\underline{x}_h$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems und eine partikuläre Lösung $\underline{x}_p$ des inhomogenen Gleichungssystems an!

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 &= 7 \ ; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 13 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 26 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 43 \ ; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + y - \tfrac{2}{3}z &= 0 \\ 2x + 2y - \tfrac{4}{3}z &= 0 \\ 3x + 3y - 2z &= 0 \ ; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 - 2x_6 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 &= 1 \ . \end{aligned}$$

Lösungen

A 3.1:

a)

	x_1	x_2	1	Pr
S	4	-3	7	-
(*)	1	1	0	2
-3|	3	-4	7	6
(*)	0	-7	7	0

$\Longrightarrow x_1 = -x_2 = 1$

r $\Longrightarrow x_2 = -1$

(vgl. Aufgabe 2.13 im 1. Lehrbrief);

b)

	x_1	x_2	x_3	1	Pr	
S	10	-1	0	11	-	
(*)	1	1	-5	-10	-13	$\Longrightarrow x_1 = -x_2 + 5x_3 - 10 = 1$
-3|	3	-4	1	9	9	
-6|	6	2	4	12	24	
(*)	0	-7	16	39	48	r $\Longrightarrow x_2 = \frac{16}{7}x_3 - \frac{39}{7} = -1$
$-\frac{4}{7}$|	0	-4	34	72	102	r
(*)	0	0	$\frac{174}{7}$	$\frac{348}{7}$	$\frac{522}{7}$	r $\Longrightarrow x_3 = 2$

(vgl. Aufgabe 2.20a im 1. Lehrbrief).

A 3.2:

a)

	x	y	1	Pr	
S	4	2	6	-	
(*)	1	2	0	3	$\Longrightarrow$ x = -2 y = 2
-2|	2	1	3	6	
-1|	1	-1	3	3	
(*)	0	-3	3	0	r $\Longrightarrow$ y = -1
-1|	0	-3	3	0	r
(*)	0	0	0	0	r;

b)

	x	y	z	1	Pr	
S	3	-3	1	4	-	
(*)	1	-2	2	1	2	$\Longrightarrow x = 2y - 2z + 1 = 3$
-2|	2	-3	1	1	1	
-1|	1	1	-4	1	-1	
1|	-1	1	2	1	3	
(*)	0	1	-3	-1	-3	r $\Longrightarrow y = 3z - 1 = 2$
-3|	0	3	-6	0	-3	r
1|	0	-1	4	2	5	r
-3|	0	0	3	3	6	r
(*)	0	0	1	1	2	r $\Longrightarrow z = 1$
(*)	0	0	0	0	0	r .

A 3.3:

a) Gestaffeltes System:

y	z	x	1
1	$-\frac{2}{3}$	0	0
	-1	3	0 ;

$$x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

(Reihenfolge der Gleichungen und der Variablen wurde zweckmäßig geändert.)
Partikuläre Lösung je nach Wahl von t, u. a. auch (für t = 0) die sog. triviale Lösung $\underline{x}_p = [0 \quad 0 \quad 0]^T = \underline{o}$.

b) Gestaffeltes System (Reihenfolge der Variablen geändert):

x	z	y	1	
1	2	3	19	
	-1	-8	-59	
			-755	$\Longrightarrow$ Gleichungssystem widersprüchlich.

c) Gestaffeltes System:

x_1	x_2	x_3	1
1	1	$-\frac{2}{3}$	0 .

Hieraus etwa: $x_3 = t_1$; $x_2 = t_2$ frei wählbar

$$\Longrightarrow x_1 = -x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{2}{3}t_1 - t_2 \;;$$

$$\underline{x} = t_1 \left[\frac{2}{3} \quad 0 \quad 1\right]^T + t_2 \left[-1 \quad 1 \quad 0\right]^T .$$

Auch hier ist $\underline{x}_p = \underline{o}$ für $t_1 = t_2 = 0$ eine partikuläre Lösung.

d) Gestaffeltes System:

x_1	x_2	x_3	1
1	1	-1	0
	-2	2	2
		1	3 ;

$$\underline{x} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} .$$

Eindeutige Lösung (allgemeine Lösung ist zugleich die partikuläre Lösung).

A 3.4:

$r = R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = 4 = n;$

$x = -2;\quad y = 3;\quad z = 1;\quad t = -1.$

A 3.5:

a) Dreieckschema (Sterngleichungen):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -93 \end{array}\right] ;$$

$R(\underline{A}) = 3;\quad R(\underline{B}) = 4$. Gleichungssystem unlösbar!

b) Dreieckschema (Sterngleichungen):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] ;$$

$R(\underline{A}) = 1;\quad R(\underline{B}) = 2$. Gleichungssystem unlösbar!

A 3.6:

Dreiecksschema (Sterngleichungen):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right];$$

$r = R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = 2 < n = 4.$

2fach unendlich vieldeutige Lösung:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A 3.7:

$r = R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = 2 < n = 4.$

2fach unendlich vieldeutige Lösung:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{23}{17} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{17} \\ -\frac{13}{17} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\frac{38}{17} \\ \frac{18}{17} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A 3.8:

	x	y	z	1	Pr	
s	$1-\lambda$	$1-\lambda$	$1-\lambda$	0		
$3-\lambda$ |	$3-\lambda$	-1	-1	0	$1-\lambda$	
(*)	-1	$3-\lambda$	-1	0	$1-\lambda$	
-1 |	-1	-1	$3-\lambda$	0	$1-\lambda$	
(*)	0	$(3-\lambda)^2-1$	$-4+\lambda$	0	$(1-\lambda)(4-\lambda)$	r
1 |	0	$-4+\lambda$	$4-\lambda$	0	0	r
(*)	0	$4-5\lambda+\lambda^2$	0	0	$4-5\lambda+\lambda^2$	r.

Letzte Gleichung: $(4 - 5\lambda + \lambda^2)\, y = 0$; nichttrivial lösbar, wenn $4 - 5\lambda + \lambda^2 = 0 \Longrightarrow$

$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 4.$

Gestaffeltes System zu $\lambda_1 = 1$ und allgemeine Lösung $\underline{x}_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]; \qquad \underline{x}_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Gestaffeltes System zu $\lambda_2 = 4$ und allgemeine Lösung $\underline{x}_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]; \qquad \underline{x}_2 = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dies ist eine Eigenwertaufgabe. Die λ_k heißen Eigenwerte. Im 4. Lehrbrief werden diese auf anderem Wege als hier berechnet werden.

Lösung zu Aufgabe 3.9 siehe Seite 51!

A 3.10:

Ausgangssystem und Dreieckssystem für die λ_i:

λ_3	λ_2	λ_1	1
1	2	3	0
0	1	1	0
-1	1	0	0
1	0	1	0

λ_3	λ_2	λ_1	1
1	2	3	0
0	1	1	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Linear abhängig: $\lambda_1 = t$, $\lambda_2 = -t$, $\lambda_3 = -t$ (vgl. Beispiel 3.19, hier $t = 1$ gewählt).

A 3.11:

a)

$\det \underline{A} = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \underline{x} = t \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$;

A 3.9:

a)

	i_1	i_2	1	Pr
S	$R_1 + 2R_2$	$-2R_2 - R_3$	$u_1 + u_2$	-
$\frac{-R_1-R_2}{R_2}$	$R_1 + R_2$	$-R_2$	u_1	$R_1 + u_1$
(*)	R_2	$-R_2 - R_3$	u_2	$-R_3 + u_2$
(*)	0	$-R_2 + \frac{(R_1+R_2)(R_2+R_3)}{R_2}$	$u_1 - \frac{R_1+R_2}{R_2} u_2$	$R_1 + u_1 + \frac{R_3}{R_2}(R_1+R_2) - \frac{R_1+R_2}{R_2} u_2$ r

Hieraus:

$$i_2 = \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} u_1 - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} u_2 ;$$

$$i_1 = \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} u_1 - \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} u_2 .$$

b) Determinante:

$$\det \underline{A} = -(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) ;$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_2 \\ R_2 & -R_1 - R_2 \end{bmatrix} ; \quad i_1, i_2 \text{ wie unter a .}$$

b)

$$\det \underline{A} = \begin{matrix} -3| \\ \lambda| \\ (*) \end{matrix} \begin{vmatrix} 15 & 7 & -3 \\ -3 & -4 & \lambda \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3+5\lambda & -4+2\lambda & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow 3 - 5\lambda = 0 \ ;$$

$$\lambda = \frac{3}{5} \Longrightarrow \underline{x} = t \left[\frac{1}{5} \quad 0 \quad 1\right]^T \text{ oder } \underline{x} = t^* \left[1 \quad 0 \quad 5\right]^T \ ;$$

c)

$$\det \underline{A} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 4 \ ;$$

$$\lambda_1 = 1 \Longrightarrow \underline{x} = t \left[1 \quad 1 \quad 1\right]^T \ ;$$

$$\lambda_2 = 4 \Longrightarrow \underline{x} = t_1 \left[-1 \quad 0 \quad 1\right]^T + t_2 \left[-1 \quad 1 \quad 0\right]^T$$

(vgl. Aufgabe 3.8).

A 3.12:

a)

$$\underline{x}_h = \underline{o} \ ; \quad \underline{x}_p = \left[\frac{1}{4} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{8}\right]^T \ ; \quad \underline{x} = \underline{x}_p \ ;$$

b)

$$\underline{x}_h = t \left[-1 \quad 0 \quad 1\right]^T \ ; \quad \underline{x}_p = \left[7 \quad 3 \quad 0\right]^T \ ; \quad \underline{x} = \underline{x}_h + \underline{x}_p \ ;$$

c)

$$\underline{x}_h = t_1 \left[2 \quad 0 \quad 3\right]^T + t_2 \left[-1 \quad 1 \quad 0\right]^T \ ; \quad \underline{x}_p = \underline{o} \ ; \quad \underline{x} = \underline{x}_h$$

(vgl. Aufgabe 3.3c);

d)

$$\underline{x}_h = t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ ; \quad \underline{x}_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ ;$$

$$\underline{x} = \underline{x}_h + \underline{x}_p \ .$$